Ответы и решения задач «зелёного» уровня сложности MathCat

1. (4 балла) Ряд из цифр и дефисов выглядит так: 1-2-3-2-1-2-3-2-1-…-3-2-1. В нём 506 единиц. Сколько в нём дефисов?

Ответ: 2020.

Решение: Ряд состоит из повторяющихся блоков (1–2–3–2–) и еще одной единицы. Значит, блоков 505, всего цифр $4 \times 505 + 1 = 2021$. Между цифрами стоит $2021 - 1 = 2020$ дефисов.

2. (7 баллов) В круг встали *N* человек: 19 рыцарей и несколько лжецов. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый из них мог произнести фразу «Оба моих соседа — лжецы». Сколько значений *N*, при которых такое возможно?

Ответ: 20.

Решение: Около рыцаря — только лжецы, причем три лжеца не могут стоять подряд. Значит, в кругу 19 рыцарей, а в промежутках между ними стоят по 1 или 2 лжеца. Всего лжецов от 19 до $19 \times 2 = 38$, в круге от 38 до 57 человек, всего 20 значений.

3. (7 баллов) Василий сложил 13 последовательных чисел и нашёл их сумму. Он запомнил, что в этой сумме четыре цифры, первые три — 100. Какая цифра четвёртая?

Ответ: 1.

Решение: Среднее число в 13 раз меньше суммы последовательных чисел, но из чисел от 1000 до 1009 только одно делится на 13 – это 1001.

4. (8 баллов) В летнем лагере дети играли в настольные игры. В первый день они сыграли 11 раз, и в каждой игре участвовало 3 человека. Во второй день было проведено 8 игр, в каждой из которых приняло участие 4 человека. Оказалось, что каждый ребёнок сыграл в итоге 5 раз. Сколько всего детей было в лагере?

Ответ: 13.

Решение: Всего было сыграно 3*11+4*8=65 игр, поэтому всего играли 65:5=13 детей.

5. (10 баллов) Петя из клетчатой бумаги по сторонам клеток вырезал всевозможные прямоугольники, периметр которых составляет *P* сторон клеток. Их оказалось 100 штук и среди них нет равных. Найдите все возможные значения *P*.

Ответ: 400 или 402.

Решение: Это прямоугольники, у которых меньшая сторона принимает значения 1, 2, 3, …, 100. Если последний такой прямоугольник 100×100, то $P = 400$. Если же последний 100×101, то $P = 402$. При больших значениях P будут возможны и другие меньшие стороны прямоугольников.

6. (10 баллов) Длины всех сторон двух подобных, но не равных друг другу треугольников — целые числа. Чему может быть равен периметр большего, если в одном треугольнике есть стороны длины 2 и 10, а в другом треугольнике есть сторона длины 5? Найдите все варианты.

Ответ: 22 или 55.

Решение: Первый треугольник имеет стороны (2,9,10), (2,10,10) или (2,10,11). Возможно только подобие (2,10,10)-(5,25,25) или (2,10,10)-(1,5,5). Периметр большего – 55 или 22.

7. (11 баллов) На конкурсе N школьникам предложили три задачи. За решённую задачу каждый школьник получал столько баллов, сколько участников конкурса эту задачу не решили. В итоге одну задачу решило трое, вторую — четверо, третью — пятеро. Чему равно N, если суммарно школьники получили 70 баллов?

Ответ: 10.

Решение: Участники набрали в сумме $3(N – 3) + 4(N – 4) + 5(N – 5) =12N − 50$ баллов. Из уравнения $12N-50=70$ находим $N=10$.

8. (13 баллов) На стороне BC треугольнике ABC отметили точку M, $MC : BC = 1 : 3$. На прямой, проходящей через точку B параллельно AC, отметили точку K так, что точки A, M и K лежат на одной прямой. Найдите площадь треугольника MKC, если площадь треугольника ABC равна 9.

Ответ: 6.

Решение: Площадь треугольника AMC равна 3, так как его основание MC втрое меньше BC. Треугольник BMK подобен треугольнику AMC с коэффициентом подобия BM:MC=2:1, поэтому его площадь равна 12. И, наконец, площадь треугольника MKC вдвое меньше площади треугольника BKC, то есть равна 6.

9. (15 баллов) Сколько натуральных чисел, кратных пяти, в записи каждого из которых более одной цифры, а цифры идут в порядке убывания?

Ответ: 526.

Решение: Есть числа, оканчивающиеся на 0 и на 5. Если число оканчивается на 5, то надо выбрать несколько (хотя бы одну) цифру из набора 9876 и поставить перед цифрой 5. Это можно сделать $2^4-1=15$ способами. Если оканчивается на 0, то надо выбрать несколько (хотя бы одну) цифру из набора 987654321 и поставить перед цифрой 0. Это можно сделать $2^9-1=511$ способами. Итого 511 + 15 = 526 вариантов.

10. (15 баллов) Пара действительных чисел $(x; y)$ такова,

что $(x^2+1)(y^2+4)=(2x+y)^2$. Найдите наименьшее возможное значение x^2+y^2.

Ответ: 4.

Решение: $(x^2+1)(y^2+4)=(2x+y)^2 \Leftrightarrow x^2y^2+4-4xy=0 \Leftrightarrow (xy-2)^2=0$, откуда $xy=2$. Так как $x^2+y^2 \geq 2xy$ (и равенство достижимо), то наименьшим возможным значением x^2+y^2 будет 4.